Wallisの公式

Theorem. Wallis の公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}$$

が成り立つ.

Proof. 定積分 I_n を

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\ (n=0,1,2,\ldots)$$

とする. このとき, $I_0=\dfrac{\pi}{2}, I_1=1$ である. また, $n\geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\sin^{n-2}x\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\sin^{n-2}x\,dx\\
&=I_{n-2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\cdot\cos x\sin^{n-2}x\,dx\\
&=I_{n-2}+\left[-\cos x\cdot\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx\\
&=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}I_n
\end{aligned}$$

より, $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_n$ となる. よって

$$\begin{aligned}
I_{2n}&=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\\
I_{2n+1}&=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1
\end{aligned}$$

ここから

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}$$

が得られる.

ここで, $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ のとき, $0\leq\sin^{2n+1}x\leq\sin^{2n}x\leq\sin^{2n-1}x$ が成り立つから, $0\leq I_{2n+1}\leq I_{2n}\leq I_{2n-1}$ となるから

$$1\leq\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\leq\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}=\frac{2n+1}{2n}$$

となるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=1$$

となり

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{\pi}{2}$$

が得られる. ■